A remark on the 2-dimensional moduli spaces of vector bundles of rank3 on K3 surfaces

安部, 健

代数幾何学シンポジウム記録
1999年度 pp.31-38

A remark on the 2-dimensional moduli spaces of vector bundles of rank3 on K3 surfaces

阿部 健 (京大・理)

1 Introduction と Main Theorem

この話では、X は常に複素数体上の射影的な K3 曲面とします。まずははじめに、$K3$ 曲面上のベクトル束を扱う際によく用いられる記号を思い出すことにします。

$$\tilde{H}(X,\mathbb{Z}) = H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus H^2(X,\mathbb{Z}) \oplus H^4(X,\mathbb{Z})$$

とおく。$\tilde{H}(X,\mathbb{Z})$ 上の対称双一次形式 $(,)$ を

$$(\alpha,\beta) = \alpha^2 \cup \beta^2 - \alpha^0 \cup \beta^4 - \alpha^4 \cup \beta^0 \in H^4(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

で定める。ただし、$\alpha = (\alpha^0,\alpha^2,\alpha^4)$, $\beta = (\beta^0,\beta^2,\beta^4)$ である。

定義 1.1. 連接層 E の向井ベクトル $v(E)$ を、

$$\begin{aligned} v(E) &= ch(E)\sqrt{td(X)} \in \tilde{H}(X,\mathbb{Z}) \\ &= \mathrm{rank}(E) + c_1(E) + \{\mathrm{rank}(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E))\} \end{aligned}$$

で定める。

Riemann-Roch の定理より

$$(v(E),v(F)) = \dim \mathrm{Ext}^1(E,F) - \dim \mathrm{Hom}(E,F) - \dim \mathrm{Ext}^2(E,F)$$

が成り立つ。

$K3$ 曲面上のベクトル束のモジュライに関して次の美しい定理が知られています。

定理 1.2 (向井 [1]). H を *ample line bundle* する。$\tilde{H}(X,\mathbb{Z}) \ni v$ が *isotropic* ($i.e.(v^2)=0$) とする。もし、

(◊) 任意の向井ベクトルが v となる *H-semistable sheaf* は *H-stable* である

ならば、

向井ベクトルが v となる *H-semistable sheaf* のモジュライ空間 $\bar{M}_H(v)$ は、$K3$ 曲面である。

ここで仮定 (◊) を落とすと、モジュライ空間 $\bar{M}_H(v)$ は一般には特異点を持ちます。

例 1.3. $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ をファイバーが連結な射とする。$X \supset s$ を π のセクション、$X \supset f$ を π のファイバーとする。また、$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}f$ も仮定する。

$H := s + 5f$

$v := (2, H, 2) \in \tilde{H}(X, \mathbb{Z})$

とおくと、$\bar{M}_H(v)$ は A_1 特異点を持つ。

実際、向井ベクトルが v になる *semistable sheaf* E は、$x \in X \setminus s$ を用いて

$$0 \to \mathcal{O}(3f) \to E \to \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{O}(s+2f) \to 0 \quad \textit{non-split}$$

と表されるものと、$\mathcal{O}(4f) \oplus \mathcal{O}(s+f)$ に *S-equivalent* になるものなので、

$$M \simeq (\textit{the surface obtained by contracting } s)$$

となる。

次の定理は、これを階数 3 の場合に計算した、というものです。

定理 1.4. $\tilde{H}(X,\mathbb{Z}) \ni v = (r, l, s)$ が *primitive* かつ *isotropic* とする。H を *ample line bundle* とする。もし $r = 3$ で、かつ向井ベクトルが v になる *H-stable sheaf* が存在するならば、$\bar{M}_H(v)$ は高々 A_1 または A_2 特異点のみを持つ正規既約曲面である。また、$\bar{M}_H(v)$ の極小特異点解消は $K3$ 曲面である。

注意 1.5. E が階数 3 の H-semistable sheaf のとき、E の Jordan-Hölder filtration は、$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 = E$ の場合と $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 = E$ の場合の 2 通りありうるが、前者が A_1 特異点に後者が A_2 特異点に対応する。

2 Twisted Stability

定理 1.4 の証明で、Matsuki-Wentworth[2] によって定義された twisted stability という概念を使うので、この章では twisted stability や wall などの概念を復習することにします。この章では $c_1 \in \mathrm{Num(X)}$ と $c_2 \in \mathbb{Z}$ を固定します。

定義 2.1. $\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ の超平面 W が wall であるとは、ample line bundle H と H-slope-semistable sheaf E で $c_1(E) = c_1, c_2(E) = c_2$ となるものと E の saturated subsheaf F $(0 < \mathrm{rank}F < \mathrm{rank}E)$ が存在して

$$\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E} \not\equiv 0$$

$$\left(\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E}\right) \cdot H = 0$$

$$W = \left\{ x \in \mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \left(\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E}\right) \cdot x = 0 \right\}$$

を満たすこと。

また、ample line bundle H を固定したとき、$\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}}$ の超平面 V が H の周りの subwall であるとは、H-slope-semistable sheaf E で $c_1(E) = c_1, c_2(E) = c_2$ となるものと E の saturated subsheaf F $(0 < \mathrm{rank}F < \mathrm{rank}E)$ が存在して

$$\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E} \not\equiv 0$$

$$\left(\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E}\right) \cdot H = 0$$

$$V = \left\{ x \in \mathrm{Num}(X)_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \left(\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E}\right) \cdot x + \frac{\chi(F)}{\mathrm{rank}F} - \frac{\chi(E)}{\mathrm{rank}E} = 0 \right\}$$

を満たすこと。

Wall は、porlarization がそこを通ると stability が変化するというものです。一方 subwall は、そこを通ると twisted-stability が変化するというものです。ここで、twisted-stability とは次のもの。詳しくは [2] を参照。

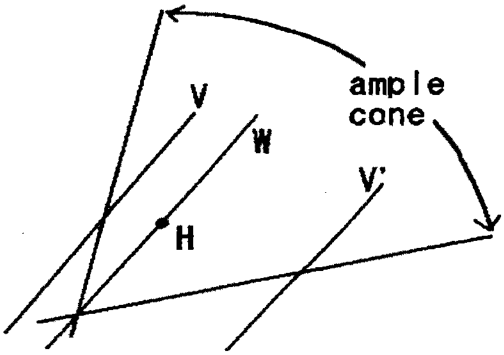

図 1: wall と subwalls

定義 2.2. E を torsion-free な層、H を ample line bundle、L を $\mathbb{Q}$-divisor とする。

E が L-twisted H-stable であるとは、任意の $0 < \mathrm{rank}F < \mathrm{rank}E$ である E の部分層 F に対して、$m >> 0$ のとき

$$\frac{\chi(F \otimes L \otimes H^m)}{\mathrm{rank}F} < \frac{\chi(E \otimes L \otimes H^m)}{\mathrm{rank}E}$$

が成り立つこと。次のように言ってもよい。任意の $0 < \mathrm{rank}F < \mathrm{rank}E$ である E の部分層 F に対して、$m >> 0$ のとき

$$\frac{\chi(F \otimes H^m)}{\mathrm{rank}F} + \frac{c_1(F) \cdot L}{\mathrm{rank}F} < \frac{\chi(E \otimes H^m)}{\mathrm{rank}E} + \frac{c_1(E) \cdot L}{\mathrm{rank}E}$$

L-twisted H-semistable も $<$ を $\leq$ に置き換えて同様に定義される。

次の章では、この L-twisted H-semistable sheaves のモジュライ空間 $\bar{M}_H^{\otimes L}(v)$ と、H-semistable sheaves のモジュライ空間 $\bar{M}_H(v)$ を比較することによって、$\bar{M}_H(v)$ を調べることにします。

3 Sketch of Proof of Theorem1.4

Properly H-semistable sheaf がないなら Theorem1.4 は Theorem1.2 より明らか。よって、以下 Properly H-semistable sheaf が存在すると仮定する。特に、$v = (3, l, s)$ において、s は 3 の倍数。

Theorem1.4 の証明は、L-twisted H-semistable sheaves のモジュライ空間 $\bar{M}_H^{\otimes L}(v)$ と H-semistable sheaves のモジュライ空間 $\bar{M}_H(v)$ を比較することによってなされるのであるが、まず $\bar{M}_H(v)$ についてわかることを書き出しておく。

補題 3.1. G_1,G_2 を X 上の *H-stable sheaf* とする。rank$G_1 = 1$,rank$G_2 = 2$,$v(G_1)+v(G_2)=v$,$\chi(G_1 \otimes H^m) = \frac{1}{2}\chi(G_2 \otimes H^m)$ ならば、G_1,G_2 は *rigid* ($i.e(v(G_1)^2) = (v(G_2)^2) = -2$) である。

補題 3.2. G_1,G_2,G_3 を X 上の *rank one sheaf* とする。$v(G_1)+v(G_2)+v(G_3)=v$,$\chi(G_1 \otimes H^m) = \chi(G_2 \otimes H^m) = \chi(G_3 \otimes H^m)$ ならば、G_1,G_2,G_3 は *rigid* (*i.e line bundles*) であり、$i \neq j$ にたいし $(v(G_i), v(G_j)) = 1$ となる。

この２つの補題を用いると、次のことがわかる。

補題 3.3. $\bar{M}_H(v) \setminus M_H(v)$ は、有限集合。

これらのことを念頭において、$\bar{M}_H^{\otimes L}(v)$ と $\bar{M}_H(v)$ を比較していきます。

以下、twist する $\mathbb{Q}$-divisor L を図２のようにとって固定する。すなわち、L と H を十分近くにとって、L と H を結ぶ線分上で wall または subwall に乗っているのは H だけになるようにする。

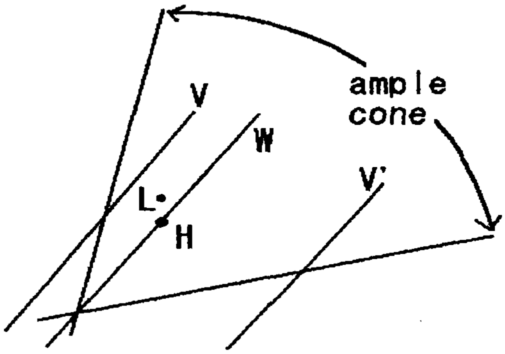

図 2: Lのとり方

補題 3.4. 向井ベクトルが v になる任意の *L-twisted H-stable sheaf* は *H-semistable* である。特に、自然な射 $f: M_H^{\otimes L}(v) \to \bar{M}_H(v)$ が存在する。

proof. Eを向井ベクトルがvになるL-twisted H-stable sheafとする。仮に、EがH-semistableでないと仮定すると、Eのsaturated subsheaf F $(0 < \mathrm{rank}F < \mathrm{rank}E)$で、

$$\frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} \cdot H = \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E} \cdot H \tag{1}$$
$$\frac{\chi(F)}{\mathrm{rank}F} > \frac{\chi(E)}{\mathrm{rank}E} \tag{2}$$

となるものが存在することになる。ところが、EはL-twisted H-stable sheafなので

$$\frac{\chi(F)}{\mathrm{rank}F} + \frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}F} \cdot L < \frac{\chi(E)}{\mathrm{rank}E} + \frac{c_1(E)}{\mathrm{rank}E} \cdot L$$

が成り立っている。これはLとHの間にsubwallがないことに矛盾する。

□

いま自然な射$f : M_H^{\otimes L}(v) \to \bar{M}_H(v)$が存在することがわかったが、実は$M_H^{\otimes L}(v) = \bar{M}_H^{\otimes L}(v)$である。すなわち次が成り立つ。

補題 3.5. 向井ベクトルがvになる任意の*L-twisted H-semistable sheaf*は*L-twisted H-stable*である。

この補題と定理1.2のL-twisted版より、$M_H^{\otimes L}(v) = \bar{M}_H^{\otimes L}(v)$はK3曲面であることがわかる。さらに、

補題 3.6. $\bar{M}_H(v)$は正規曲面。

であることにも注意すると、結局、定理1.4を証明するには次の3つのことを示せばよいことになる。

1. fは$f^{-1}(M_H(v))$と$M_H(v)$の同型を与える。
2. $\bar{M}_H(v) \setminus M_H(v) \ni x = [G_1 \oplus G_2]$ $(\mathrm{rank}G_1 = 1, \mathrm{rank}G_2 = 2)$にたいして、$f^{-1}(x)$は$(-2)$-curve。
3. $\bar{M}_H(v) \setminus M_H(v) \ni y = [G_1 \oplus G_2 \oplus G_3]$ $(\mathrm{rank}G_1 = 1, \mathrm{rank}G_2 = 1, \mathrm{rank}G_3 = 1)$にたいして、$f^{-1}(y)$は2つの$(-2)$-curveが一点で交わったもの。

ここでは、3番目の主張だけ証明することにします。

まず G_1、G_2、G_3 を並べ替えて $c_1(G_1)\cdot L \le c_1(G_2)\cdot L \le c_1(G_3)\cdot L$ としてよい。また、以下では $\frac{1}{3}c_1(E)\cdot L < c_1(G_2)\cdot L$ の場合だけ考える。($\frac{1}{3}c_1(E)\cdot L > c_1(G_2)\cdot L$ の場合も同様。)

補題 3.2 より $(v(G_1), v(G_2)) = 1$ なので、$\mathbb{C}^\times$ 倍を除いて一意的に non-split exact sequence

$$0 \to G_1 \to E_1 \to G_2 \to 0$$

が存在する。こんどは E_1 と G_3 を用いて non-split exact sequence

$$0 \to E_1 \to E_2 \to G_3 \to 0$$

を作るとこれは $\mathbb{C}^\times$ 倍を除いて 1 次元分ある。図式に書くと、

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & G_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_2 \arrow[r] \arrow[d] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] & E_3 \arrow[r] \arrow[d] & G_3 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

となる。G_2 と G_3 を入れ替えて同様のことをすると、

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & G_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_3 \arrow[r] \arrow[d] & F_3 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

が得られる。E_2、F_2 は L-twisted H-semistable になる。これらはともに $\mathbb{P}^1$ でパラメトライズされる。上の図式で、列と真中の行は分裂しないが、一番下の行はパラメトライズしている $\mathbb{P}^1$ の一点で分裂して、そのとき E_2、F_2 は同型になり 2 つの $\mathbb{P}^1$ は $\bar{M}_H^{\otimes L}(v)$ の中で交わる。

参考文献

[1] S.Mukai, *Muduli of vector bundles on K3 surfaces I*, Vector bundles on Algebraic Varietes, Oxford,1987, 341-413

[2] K.Matsuki and R.Wentworth, *Mumford-Thaddeus principle on the moduli spaces of vector bundles on a surface*, Inter.J.Math.,vol8(1997), 97-148